

Следующие две статьи продолжают серию публикаций под общим названием БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ «ВИРТУАЛЬНЫЙ ТОКАМАК» (грант РФФИ № 08-07-00182). Авторы статей являются разработчиками программ. Описание библиотеки и программ находится на сайте [leader.ic.msu.su/~fusion](http://leader.ic.msu.su/~fusion). Возможны консультации по e-mail.

УДК 533.9:519.688

## МОДУЛЬ ТОКСТАВ (МОДУЛЬ БИБЛИОТЕКИ ПРОГРАММ «ВИРТУАЛЬНЫЙ ТОКАМАК»)

Д.Ю. Сычугов, В.В. Амелин (МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия),  
Н.А. Гасилов (Университет Башкент, Анкара, Турция)

В статье описан модуль библиотеки «Виртуальный токамак» — код «ТОКСТАВ» (ТОКАмак STABility) для расчёта вертикальной неустойчивости плазмы как при идеальной, так и при конечной проводимости пассивных стабилизирующих витков.

**Ключевые слова:** библиотека «Виртуальный токамак», код ТОКСТАВ (ТОКАмак STABility), вертикальная неустойчивость плазмы, пассивные обратные связи.

THE CODE TOKSTAB (MODULE OF PROGRAM LIBRARY VIRTUAL TOKAMAK). D.Yu. SYCHUGOV, V.V. AMELIN, N.A. GASILOV. In the present paper the standard code TOKSTAB (TOKAmaк STABility) for analysis of passive ideal and resistive feedbacks is described. This code is one of the modules of the library Virtual Tokamak.

**Key words:** library of standard codes «Virtual tokamak», the code TOKSTAB (TOKAmaк STABility), vertical instability of plasma, passive feedbacks.

### ВВЕДЕНИЕ

Код ТОКСТАВ [1], применяемый для расчёта вертикальной неустойчивости плазмы [2—3], включен в настоящее время в библиотеку «Виртуальный токамак» [4]. В его основе лежит модель пассивной обратной связи как с идеальной, так и с конечной проводимостью элементов и модель «твёрдого сдвига» идеально проводящей плазмы. Код характеризуют:

— высокая скорость вычислений (время расчёта для типичного варианта на ПЭВМ с процессором Intel Pentium IV (2200 МГц) составляет 5—10 с);

— наличие встроенного графического редактора, а также удобного интерфейса, включающего в себя средства обмена информацией, помощь и инструкции, поддержку диалога на русском и английском языках.

Входными данными для кода являются МГД-равновесие, рассчитанное по коду ТОКАМЕQ [5], и файл, описывающий стабилизирующую систему проводников.

Данная версия кода поддерживается ОС MS Windows, MS Visual Studio 2005.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

**Система физических единиц.** Нами используется стандартная для современных токамаков система единиц: расстояние — метр [м], время — секунда [с], масса — килограмм [кг], сила тока — мегаАмпер [МА], электрическое сопротивление — Ом [Ом], магнитный поток — Вебер [В·с], индукция магнитного поля — Тесла [Тл], коэффициенты само- и взаимной индукции — микроГенри [мкГн].

**Постановка задачи.** Будем считать, что плазменный шнур движется по вертикали как твёрдое тело и распределение тока в нём и полный ток  $I_p$  не меняются. Пусть  $\xi(t)$  — малое смещение шнура от положения равновесия. Постановка задачи состоит из уравнения движения для плазмы и уравнений Кирхгофа для пассивных витков:

$$10^{-6} M \frac{d^2\xi}{dt^2} = F'_A \xi(t) + F_1 I_1(t) + F_2 I_2(t) + \dots + F_N I_N(t); \quad (1)$$

$$L_{i1} \frac{dI_1}{dt} + \dots + L_{iN} \frac{dI_N}{dt} + R_i I_i = -I_p \frac{dL_{ip}}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\Phi_i \frac{d\xi}{dt}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь  $M$  — масса шнура;  $F'_A \xi$  — сила Лоренца, возникающая при его смещении;  $I_k$  — наведённый ток в  $k$ -м витке;  $F_k I_k$  — возвращающая сила со стороны  $k$ -го витка;  $N$  — число витков;  $L_{ik}$  — коэффициенты индукции витков;  $R_i$  — омическое сопротивление;  $L_{ip}$  — коэффициент взаимной индукции между  $i$ -м витком и плазменным шнуром.

**Вычисление коэффициентов.** Свойства равновесия и системы пассивных витков учитываются в задаче (1)—(2) через коэффициенты [1]. Стабилизирующие проводники приближаются набором кольцевых витков. Коэффициенты взаимной индукции между витками  $L_{ij}$  и коэффициент самоиндукции  $L_{ii}$  имеют вид

$$L_{ij} = G(r_i, z_i, r_j, z_j) = 0,4\pi k^{-1} \sqrt{r_i r_j} \quad 2 - k^2 \quad K(k) - 2E(k) ; \quad L_{ii} = 0,4\pi r_i \left( \ln \frac{8r_i}{a_i} - 1,75 \right), \quad (3)$$

где  $k^2 = 4r_i r_j / (r_i + r_j)^2 + (z_i - z_j)^2$  <sup>1/2</sup>;  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты с осью  $z$  вдоль главной оси тора;  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода;  $r_i$  и  $a_i$  — большой и малый радиус кольца.

Для подсчёта  $\Phi_i$  вычислим наведённый магнитный поток  $\psi$  в точке  $r_i, z_i$

$$\Psi(r_i, z_i) = \iint_{S_p} j_\varphi(r, z) G(r, z + \xi, r_i, z_i) - G(r, z, r_i, z_i) dS = \xi \iint_{S_p} j_\varphi(r, z) \frac{\partial G}{\partial z} dS, \quad (4)$$

где  $S_p$  — сечение плазменного шнура плоскостью  $\varphi = \text{const}$ . Из (4) следует, что

$$\Phi_i = \iint_{S_p} j_\varphi(r, z) \frac{\partial G(r, z, r_i, z_i)}{\partial z} dS.$$

Для расчёта  $F_i$  разобьём плазменный шнур на продольные витки. Длина витка равна  $2\pi r$ , текущий по нему ток равен  $j_\varphi(r, z)dS$ . По закону Ампера на виток со стороны  $i$ -го стабилизирующего проводника по направлению  $z$  действует сила

$$dF_i = -2\pi r j_\varphi(r, z) B_r(r, z + \xi, t) dS = 2\pi r j_\varphi(r, z) \frac{I_i(t) \partial G(r, z + \xi, r_i, z_i)}{2\pi r \partial z} dS. \quad (5)$$

Учтем малость  $\xi$ , проинтегрируем (5) по сечению  $S_p$  и, нормируя на  $I_i(t)$ , получим

$$F_i = \iint_{S_p} j_\varphi(r, z) \frac{\partial G(r, z, r_i, z_i)}{\partial z} dS = \Phi_i.$$

Вычислим  $F'_A$ . Дисбаланс сил  $F_z$ , возникающий из-за смещения шнура во внешнем равновесном поле  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ , равен

$$F_z = -2\pi \iint_{S_p} r j_\varphi(r, z) B_{r \text{ ext}}(r, z + \xi) dS = -2\pi \iint_{S_p} r j_\varphi(r, z) B_{r \text{ ext}}(r, z) dS - 2\pi \xi \iint_{S_p} r j_\varphi(r, z) \frac{\partial B_{r \text{ ext}}(r, z)}{\partial z} dS. \quad (6)$$

Первое слагаемое в (6) является равнодействующей внешних сил по вертикали в равновесии и поэтому равно нулю. Преобразуем второе слагаемое

$$F_z = -2\pi \xi \iint_{S_p} r j_\varphi(r, z) \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi_{\text{ext}}(r, z)}{\partial z} \right) dS = \xi \iint_{S_p} j_\varphi(r, z) \frac{\partial^2 \Psi_{\text{ext}}(r, z)}{\partial z^2} dS.$$

Из последнего выражения легко получается формула для величины  $F'_A$ :

$$F'_A = \iint_{S_p} j_\varphi(r, z) \frac{\partial^2 \Psi_{\text{ext}}(r, z)}{\partial z^2} dS. \quad (7)$$

Наконец, масса шнура  $M$  рассчитывается исходя из числа частиц  $N_p$  на  $1 \text{ м}^3$  и массы частиц  $m_p$  (для водородной плазмы  $m_p \sim 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ) по формуле  $M = N_p m_p V = N_p m_p \int_0^{2\pi} \iint_{S_p} r dr d\varphi dz = 2\pi N_p m_p \iint_{S_p} r dS$ .

**Переход к задаче на собственные значения.** Будем искать решения задачи (1)—(2) в виде  $\xi(t) = \xi_0 e^{\gamma t}$ ,  $v(t) = \xi'(t) = \xi_0 \gamma e^{\gamma t} = v_0 e^{\gamma t}$ ,  $I_k(t) = I_{k,0} e^{\gamma t}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Система (1)—(2) сводится к обобщённой алгебраической задаче на собственные значения

$$\gamma \left( \sum_{j=1}^N L_{kj} I_{j,0} + F_k \xi_0 \right) = -R_k I_{k,0}; \quad \gamma \xi_0 = v_0; \quad \gamma M v_0 = \sum_{i=1}^N F_i I_{i,0} + F'_A \xi_0$$

или после введения вектора  $\mathbf{X} = (I_{1,0}, \dots, I_{N,0}, \xi_0, v_0)$  в матричной записи

$$\gamma B \mathbf{X} = A \mathbf{X}, \tag{8}$$

где  $A = \begin{pmatrix} -R_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -R_N & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ F_1 & \dots & F_N & F'_A & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1N} & F_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{N1} & \dots & L_{NN} & F_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M \end{pmatrix}.$

Нас интересует главное собственное значение задачи (8)  $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ , удовлетворяющее условию  $\alpha_0 = \max_k(\text{Re} \lambda_k)$ . Если  $\alpha_0 \leq 0$ , то плазма устойчива. Численное решение задачи (8) реализовано алгоритмом «Вычисление всех собственных значений и собственных векторов  $\mathbf{QZ}$  — алгоритмом в обобщённой проблеме собственных значений  $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$  двух вещественных матриц», подпрограмма AGG0R, Библиотека численного анализа НИВЦ МГУ [5].

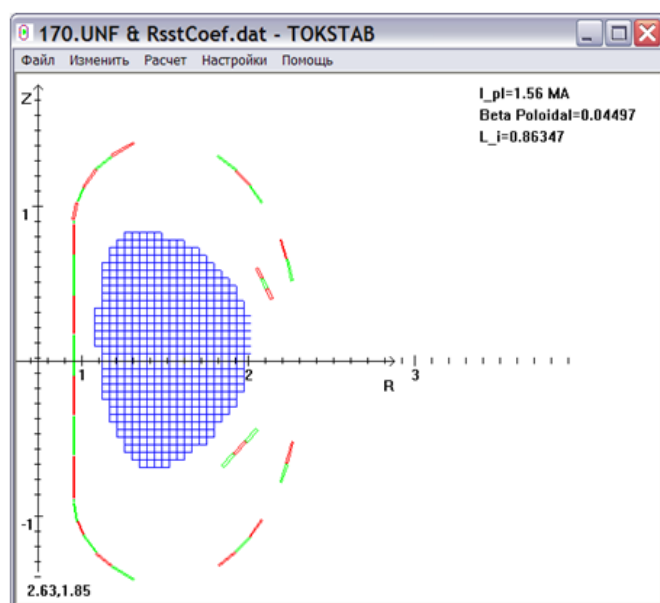
### ДЕЙСТВИЯ, ПРЕДШЕСТВУЮЩИЕ РАСЧЁТУ УСТОЙЧИВОСТИ

Перед началом расчёта устойчивости необходимо задать входные данные:

- с помощью кода ТОКАМЕQ, версия 21.9 [4] рассчитать МГД-равновесие плазмы, результаты расчётов записать в файл;
- с помощью либо текстового, либо графического редактора кода ТОКСТАВ создать файл, описывающий систему пассивных витков.

Инструкции к кодам, их exe-файлы и шаблоны для описания стабилизирующих систем можно после регистрации получить по адресу: [leader.ic.msu.ru/~fusion](http://leader.ic.msu.ru/~fusion).

### КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО ПО РАБОТЕ С МОДУЛЕМ ТОКСТАВ



Главная рабочая страница приложения ТОКСТАВ

**Запуск кода и загрузка равновесия.** При запуске файла «tokstab.exe» после заставки открывается главное окно. Для выбора равновесия необходимо выбрать пункт меню «файл» → «открыть файл равновесия» и указать расположение файла.

**Загрузка системы пассивных витков.** После выбора равновесия загружается система пассивных витков. Для этого из пункта меню «файл» → «открыть файл конфигурации» следует указать расположение файла. Сам файл имеет текстовый тип, его данные хранятся в табличном виде (csv-формат). Это позволяет редактировать параметры системы в любом текстовом либо табличном редакторе. При невыполнении директивы загрузки рассчитывается устойчивость плазмы без стабилизирующей системы проводников.

Примерный вид главной рабочей страницы

модуля после загрузки файлов с исходными данными приведен на рис. 1. Далее возможны следующие операции:

- загрузка и редактирование системы проводников;
- сохранение изменённой системы проводников;
- выполнение расчётов для идеальной и резистивной моделей устойчивости;
- вывод на печать результатов работы;
- выбор русского или английского языка для диалога.

**Просмотр и редактирование конфигурации системы проводников.** В коде TOKSTAB имеется возможность редактирования системы проводников в графическом режиме. Графический редактор встроен в главное окно приложения и поддерживает следующие операции:

- добавление в систему новых проводников, а также их удаление;
- перемещение проводников методом drag-and-drop;
- изменение параметров проводника в отдельной графической форме.

**Расчёт устойчивости.** После выбора равновесия и стабилизирующей системы проводников проводится расчёт устойчивости плазмы. Для этого следует выбрать пункт меню «расчёт» → «инкремент». Результатом расчёта являются два главных комплексных собственных числа задачи (8), полученных в предположении идеальной и конечной проводимости витков стабилизирующей системы. Равенство нулю вещественной части первого собственного числа означает, что плазма устойчива по отношению к «быстрым» МГД-смещениям. Вещественная часть второго собственного числа при устойчивости плазмы в рамках модели идеальной проводимости соответствует инкременту развития «медленной» неустойчивости.

Помимо инкрементов неустойчивости, выдается также характерное время её развития.

Работа поддержана грантом РФФИ № 08-07-00182-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычугов Д.Ю., Амелин В.В., Гасилов Н.А., Цаун С.В. Численное исследование вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке при конечной проводимости стабилизирующих элементов. — Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2004, № 4, с. 27—32.
2. Bondarchuk E.N., Dnestrovskii Yu.N., Leonov V.M., Maksimova I.I., Sychugov D.Yu., Tsaun S.V., Voznesesky V.A. Vertical MHD stability of the T15-M Tokamak Plasma. — Plasma Devices and Operations, December 2003, vol. 11, № 4, p. 219—227.
3. Какурин А.М., Леонов В.М., Ноткин Г.Е., Хвостенко П.П., Цаун С.В., Бондарчук Э.Н., Васильев В.И., Минеев А.Б., Максимова И.И., Амелин В.В., Гасилов Н.А., Сычугов Д.Ю. Основные сценарии разряда токамака T-15M. — ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 2005, вып. 4, с. 53—75.
4. Сычугов Д.Ю., Шишкин А.Г., Зайцев Ф.С., Лукаш В.Э., Семенов И.Б., Хайрутдинов Р.Р., Зотов И.В., Нефедов В.В. Библиотека программ «ВИРТУАЛЬНЫЙ ТОКАМАК». — В сб.: XI Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 5—9 октября 2009 г., с. 101—102.
5. Сычугов Д.Ю. Код для расчета МГД равновесия ТОКАМЕQ (модуль библиотеки программ «Виртуальный Токамак»). ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 2008, вып. 4, с. 85—89.
6. [http://www.srcc.msu.su/num\\_anal/lib\\_na/cat/ag/agg0r.htm](http://www.srcc.msu.su/num_anal/lib_na/cat/ag/agg0r.htm).

Статья поступила в редакцию 3 июля 2010 г.  
Вопросы атомной науки и техники.  
Сер. Термоядерный синтез, 2010, вып. 3, с. 46—49.